

Разбор задач

Задача 1. Лёша путешественник

Если перед вагоном Алексея находится ровно 7 вагонов, то Алексей забежал в 8 вагон, соответственно, если перед ним не более 7 вагонов, то он мог забежать в любой вагон с 1 по 8.

Если за вагоном Алексея находится ровно 5 вагонов, то он забежал в 5 вагон, соответственно, если за ним не более 5 вагонов, то он мог забежать в любой вагон с 5 по 10.

Обоим условиям удовлетворяют вагоны с номерами 5, 6, 7, 8.

Задача 2. Легендарные тренировки

Запишем для каждого игрока распределение по командам на тренировки в виде строки из 1 и 2, где 1 означает, что он играет в первой команде, а 2 – что во второй. Например, набор 1122 означает, что игрок первые две тренировки был в первой команде, а потом – две тренировки во второй.

1 - 111
2 - 112
3 - 121
4 - 122
5 - 211
6 - 212
7 - 221

При таком распределении каждый игрок сыграл против каждого, потому что если бы два игрока всё время играли в одной команде, то строки распределения были бы у них абсолютно одинаковыми. Так как все строки распределения разные, любая пара игроков отличается командой хотя бы в одной тренировке.

Докажем, что нельзя добиться такого результата менее чем за три тренировки. Если бы тренировок было две, то количество различных распределений чисел 1 и 2 на две тренировки было бы равно четырём, и их не хватило бы на 7 игроков.

Для приведенного выше распределения в ответ нужно указать такие составы первой команды:

1 2 3 4
1 2 5 6
1 3 5 7

Есть и другие варианты распределения игроков на команды в трёх тренировках.

Задача 3. Рыцари и лжецы

Одно из возможных решений:

0	1	0	0
0	0	0	1
1	0	0	0
0	0	1	0

В такой расстановке вокруг каждой единицы стоят только нули, и возле каждого нуля есть хотя бы одна единица.

Докажем, что не получится разместить на поле меньше 4 рыцарей. Допустим, рыцарей 3, тогда лжецы займут оставшиеся 13 клеток. Рядом с каждым рыцарем может находиться не более 4 лжецов, то есть рядом с 3 рыцарями не более 12 лжецов, поэтому хотя бы 1 лжец окажется не рядом ни с каким рыцарем, тогда он будет окружен лжецами, что противоречит условию задачи.

Существуют и другие расстановки 4 рыцарей.

Задача 4. Последовательность

Для ответа на первый вопрос можно построить первые 20 элементов последовательности:

1 2 4 6 8
10 11 13 15 17 19
21 22 24 26 28
30 31 33 35

Рассмотрим числа последовательности, меньшие 100. Заметим, что при переходе в новый десяток сумма цифр меняется с чётной на нечётную, поэтому происходит увеличение числа на 1, в результате чего сумма цифр становится чётной, и далее с шагом 2 перебираются числа очередного десятка. Поэтому возможны всего два варианта последовательности последних цифр:

1, 2, 4, 6, 8 для чётных десятков
0, 1, 3, 6, 7, 9 для нечётных десятков

Получается, что из каждых 20 последовательных чисел ровно 11 включаются в последовательность. При переходе через число 100 после числа 99 идёт число 101, сумма цифр остается чётной, поэтому и далее идут числа с шагом 2:

101 103 105 107 109
111 112 114 116 118 120
121 123 125 127 129

Заметим, что здесь также среди каждых последовательных 20 чисел ровно 11 принадлежат последовательности.

Поскольку в задаче требуется найти число, стоящее на сотом месте в последовательности, разделим 100 на 11, чтобы узнать сколько групп по 11 элементов предшествуют сотому элементу

$$100 : 11 = 9 \text{ (ост. 1)}$$

Первые 9 групп чисел содержат числа от 1 до $9 * 20 = 180$, причём последним будет само число 180, поэтому на 99-м месте последовательности стоит число 180. Далее сделаем один шаг. Так как сумма цифр в числе 180 – нечётная ($1 + 8 + 0 = 9$), прибавим к нему 1 и получим 181. Таким образом, ответ на второй вопрос – 181.

Для ответов на третий и четвёртый вопросы надо определить распределение чётных и нечётных чисел среди элементов последовательности.

По приведённым выше первым элементам видно, что среди каждой группы из 11 элементов ровно 5 чётных и 6 нечётных.

Рассмотрим первые 47 чисел последовательности. Они содержат 4 группы по 11 элементов, в которых всего $4 * 6 = 24$ нечётных числа. Эти 4 группы чисел содержат числа от 1 до 80, причём на 44-м месте расположено число 79. Посчитаем следующие элементы, пользуясь правилом построения последовательности:

45 – 81
46 – 82
47 – 84

Среди этих элементов ещё один нечётный, поэтому всего среди первых 47 элементов ровно 25 нечётных.

Рассмотрим первые 103 числа последовательности. Они содержат 9 групп по 11 элементов, в которых всего $9 * 5 = 45$ чётных чисел. Эти 9 групп чисел содержат числа от 1 до 180, причём на 99-м месте расположено число 180. Посчитаем следующие элементы, пользуясь правилом построения последовательности:

100 – 181
101 – 183
102 – 185
103 – 187

Среди этих элементов нет ни одного чётного, поэтому всего среди первых 103 элементов ровно 45 чётных.

Таким образом, ответами на вопросы задачи являются:

- 1) 35
- 2) 181
- 3) 25
- 4) 45

Задача 5. Игра

Для каждой клетки, начиная с нижнего уровня, вычислим максимальное количество монет, которое можно набрать, добравшись до неё:

10	50	50	48
9	50	45	45
8	35	35	45
7	35		21
6	35	21	21
5		15	21
4	12	12	14
3	12	2	6
2	2		0
1	2	0	0

По этой таблице видно, что максимальное количество набранных монет равно 50. Восстановим путь, двигаясь по которому, можно набрать эти 50 монет:

10	50	50	48
9	50	45	45
8	35	35	45
7	35		21
6	35	21	21
5		15	21
4	12	12	14
3	12	2	6
2	2		0
1	2	0	0

Получаем программу-решение:

#>##< <###>